



**Автономная некоммерческая образовательная организация
высшего образования Центросоюза Российской Федерации
«Сибирский университет потребительской кооперации»**

Методические указания и задания
по выполнению практических работ
по дисциплине

ОД.07 МАТЕМАТИКА

по специальности
38.02.02 Страхование дело (по отраслям)

(направленность программы: Страхование иное, чем страхование жизни)

квалификация выпускника:

Специалист страхового дела

Новосибирск
2026

Методические указания и задания по выполнению практических работ по дисциплине "*Математика*" для обучающихся по специальности 38.02.02 Страховое дело (по отраслям)/[сост.: Н.Н. Беляева, ст. преподаватель, Кузьмин К.А., ст. преподаватель кафедры математики и информатики]; - Новосибирск, 2026.

Рецензент:

Бобоев К., канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры математики и информатики

Методические указания и задания по выполнению практических работ по дисциплине "*Математика*" утверждены и рекомендованы к изданию кафедрой математики и информатики, протокол от 26 марта 2026 г. № 8.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Общие положения	4
2. Темы и их краткое содержание	5
3. Методические указания и задания к практическим занятиям	7
4. Список рекомендуемой литературы	12
5. Современные профессиональные базы данных и информационные ресурсы сети интернет	

1. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Методические указания и задания к практическим занятиям, контрольной по дисциплине «Математика» составлены в соответствии с рабочей программой учебной и предназначены для обучающихся специальности 38.02.02 Страхование дело (по отраслям).

Цель методических указаний – усвоение и закрепление обучающимися теоретических знаний, овладение методами решения математических и статистических задач, получение навыков интерпретации полученных результатов и развития математической интуиции.

Для студентов заочной формы обучения результатом внеаудиторной самостоятельной работы является предоставление контрольной работы.

Контрольная работа является одной из составляющих учебной деятельности студента по овладению историческими знаниями.

По каждой теме студенту предлагается выполнить контрольную работу, решив самостоятельно несколько задач своего варианта.

Если последняя цифра шифра студенческого билета является нечётным числом (1; 3; 5; 7; 9), тогда студент решает Вариант №1, если же последняя цифра является чётным числом (0; 2; 4; 6; 8) – Вариант №2.

Выполнить контрольные работы (их 5 по количеству тем) нужно в отдельной тетради в клетку и в начале сессии сдать преподавателю на проверку.

Программу по дисциплине за 10-11 классы студенты должны изучать по учебникам.

2. ТЕМЫ И ИХ КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Раздел 1. Повторение курса математики основной школы

Тема 1.1 Цель и задачи математики при освоении специальности.

Множества и логика

Цель и задачи математики при освоении специальности. Базовые знания и умения по математике в профессиональной и в повседневной деятельности. Множество, операции над множествами, диаграммы Эйлера-Венна. Использование теоретико-множественного аппарата для описания реальных процессов и явлений в профессиональной деятельности, при решении задач из других дисциплин

Тема 1.2 Числа и вычисления. Выражения и преобразования

Натуральные и целые числа. Признаки делимости целых чисел. Рациональные числа. Обыкновенные и десятичные дроби, проценты, бесконечные периодические дроби. Арифметические операции с рациональными числами, преобразования числовых выражений. Действительные числа. Рациональные и иррациональные числа. Арифметические операции с действительными числами. Приближённые вычисления, правила округления, прикидка и оценка результата вычислений.

Тема 1.3. Тождества и тождественные преобразования Уравнения, неравенства и их системы

Тождества и тождественные преобразования. Уравнение, корень уравнения. Неравенство, решение неравенства. Метод интервалов. Решение целых и дробно-рациональных уравнений и неравенств. Применение уравнений и неравенств к решению математических задач и задач из различных областей науки и реальной жизни. Системы и совокупности рациональных уравнений и неравенств. Системы линейных уравнений. Решение прикладных задач с помощью системы линейных уравнений.

Тема 1.4 Процентные вычисления в профессиональных задачах

Применение дробей и процентов для решения прикладных задач из различных отраслей знаний и реальной жизни. Приближённые вычисления, правила округления, прикидка и оценка результата вычислений. Разные способы вычисления процентов. Процентные вычисления в профессиональных задачах. Применение уравнений и неравенств к решению математических задач и задач из различных областей науки и реальной жизни.

Тема 1.5 Последовательности и прогрессии

Последовательности, способы задания последовательностей. Монотонные последовательности. Арифметическая и геометрическая прогрессии. Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия. Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Формула сложных процентов. Использование прогрессии для решения реальных задач прикладного характера

Тема 1.6. Функции и графики

Функция, способы задания функции. График функции. Взаимно обратные функции. Область определения и множество значений функции. Нули функции. Промежутки знакопостоянства. Чётные и нечётные функции.

Тема 1.7. Входной контроль

Вычисления и преобразования. Уравнения и неравенства. Прогрессии. Функции и графики

Раздел 2. Степени и корни. Степенная, показательная и логарифмическая функция

Тема 2.1. Арифметический корень n -ой степени

Арифметический корень натуральной степени. Действия с арифметическими корнями n -ой степени

Тема 2.2. Степени. Стандартная форма записи действительного числа

Степень с целым показателем. Стандартная форма записи действительного числа. Использование подходящей формы записи действительных чисел для решения практических задач и представления данных. Степень с рациональным показателем. Свойства степени. Преобразование выражений, содержащих степени с рациональным показателем.

Тема 2.3. Степенная функция

Степенная функция с натуральным и целым показателем. Её свойства и график. Свойства и график корня n -ой степени

Тема 2.4. Иррациональные уравнения и неравенства.

Решение иррациональных уравнений и неравенств.

Тема 2.5. Применение свойств степенной функции

Использование свойств степенной функции при решении уравнений и неравенств.

Тема 2.6. Показательная функция, её свойства

Показательная функция, её свойства и график Показательная функция, её свойства и график.

Тема 2.7. Показательные уравнения и неравенства

Показательные уравнения и неравенства

Тема 2.8. Применение свойств показательной функции

Решение показательных уравнений и показательных неравенств

Тема 2.9. Логарифм числа. Десятичный и натуральный логарифмы

Логарифм числа. Десятичный и натуральный логарифмы

Тема 2.10. Свойства логарифмов

Преобразование выражений, содержащих логарифмы

Тема 2.11. Логарифмическая функция, её свойства

Логарифмическая функция, её свойства и график

Тема 2.12. Логарифмические уравнения и неравенства

Логарифмические уравнения и неравенства

Тема 2.13. Логарифмы в природе и технике

Применение логарифма. История развития математики. Логарифмическая спираль в природе. Её математические свойства. Использование графиков функций для исследования процессов и зависимостей, которые возникают при решении задач из различных областей науки и реальной жизни

Тема 2.14. Применение логарифмов к решению задач

Решение логарифмических уравнений и неравенств

Раздел 3. Прямые и плоскости в пространстве

Тема 3.1. Повторение планиметрии. Основные понятия стереометрии

Основные фигуры, факты и теоремы планиметрии. Основные понятия стереометрии. Точка, прямая, плоскость, пространство. Понятие об аксиоматическом построении стереометрии: аксиомы стереометрии и следствия из них

Тема 3.2. Прямые и плоскости в пространстве. Параллельность прямых, прямой и плоскости, плоскостей

Взаимное расположение прямых в пространстве: пересекающиеся, параллельные и скрещивающиеся прямые. Параллельность прямых и плоскостей в пространстве: параллельные прямые в пространстве, параллельность трёх прямых, параллельность прямой и плоскости. Углы с сонаправленными сторонами, угол между прямыми в пространстве. Параллельность плоскостей: параллельные плоскости, свойства параллельных плоскостей. Простейшие пространственные фигуры на плоскости: тетраэдр, куб, параллелепипед, построение сечений

Тема 3.3. Перпендикулярность прямых и плоскостей

Перпендикулярность прямой и плоскости: перпендикулярные прямые в пространстве, прямые параллельные и перпендикулярные к плоскости, признак перпендикулярности прямой и плоскости, теорема о прямой перпендикулярной плоскости

Тема 3.4. Углы между прямыми и плоскостями

Углы в пространстве: угол между прямой и плоскостью, двугранный угол, линейный угол двугранного угла. Перпендикуляр и наклонные: расстояние от точки до плоскости, расстояние от прямой до плоскости, проекция фигуры на плоскость. Перпендикулярность плоскостей: признак перпендикулярности двух плоскостей. Теорема о трёх перпендикулярах

Тема 3.5. Прямые и плоскости в практических задачах

Расположение прямых и плоскостей в окружающем мире (природе, искусстве, архитектуре, технике).

Тема 3.6. Основные пространственные фигуры и их взаиморасположение

Взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве. Построение сечений

Раздел 4. Координаты и векторы в пространстве

Тема 4.1. Векторы в пространстве. Действия с векторами

Вектор на плоскости и в пространстве. Сложение и вычитание векторов. Умножение вектора на число. Разложение вектора по трём некомпланарным векторам. Правило параллелепипеда. Решение задач, связанных с применением правил действий с векторами

Тема 4.2. Координаты в пространстве. Простейшие задачи в координатах

Прямоугольная система координат в пространстве. Координаты вектора. Простейшие задачи в координатах. Угол между векторами. Скалярное произведение векторов. Вычисление углов между прямыми и плоскостями. Координатно-векторный метод при решении геометрических задач

Тема 4.3. Практико-ориентированные задачи на координатной плоскости

Координатная плоскость. Вычисление расстояний и площадей на координатной плоскости. Количественные расчеты

Тема 4.4. Решение задач на координаты

Координатно-векторный метод при решении геометрических задач. Решение задач, связанных с применением правил действий с векторами. Задачи планиметрии и стереометрии и методы их решения.

Раздел 5. Основы тригонометрии. Тригонометрические функции

Тема 5.1. Основы тригонометрии

Синус, косинус и тангенс числового аргумента. Арксинус, арккосинус, арктангенс числового аргумента. Тригонометрическая окружность, определение тригонометрических функций числового аргумента.

Тема 5.2. Основные тригонометрические тождества

Преобразование тригонометрических выражений. Основные тригонометрические формулы.

Тема 5.3. Периодические функции. Тригонометрические функции

Функция. Периодические функции. Тригонометрические функции, их свойства и графики

Тема 5.4. Преобразование графиков тригонометрических функций

Сжатие и растяжение графиков тригонометрических функций. Преобразование графиков тригонометрических функций

Тема 5.5. Описание производственных процессов с помощью графиков функций

Использование свойств тригонометрических функций в профессиональных задачах. Использование графиков функций для исследования процессов и зависимостей, которые возникают при решении задач из других учебных дисциплин и реальной жизни

Тема 5.6. Обратные тригонометрические функции

Обратные функции. Обратные тригонометрические функции. Их свойства и графики

Тема 5.7. Тригонометрические уравнения

Решение тригонометрических уравнений

Тема 5.8. Тригонометрические неравенства

Примеры тригонометрические неравенства. Решение простейших тригонометрических неравенств в том числе с использованием свойств функций

Тема 5.9. Решение задач тригонометрии

Тригонометрические выражения, уравнения и неравенства

Раздел 6. Производная функции, ее применение

Тема 6.1. Монотонность функции. Экстремумы функции. Точки экстремума

Промежутки монотонности функции. Максимумы и минимумы функции. Наибольшее и наименьшее значение функции на промежутке

Тема 6.2. Понятие о непрерывности функции

Непрерывные функции. Метод интервалов.

Тема 6.3. Производная функции.

Производная функции. Производные элементарных функций. Формулы нахождения производной суммы, произведения и частного.

Тема 6.4. Геометрический и физический смысл производной

Геометрический смысл производной функции – угловой коэффициент касательной к графику функции в точке. Уравнение касательной к графику функции

Тема 6.5. Физический смысл производной в профессиональных задачах

Физический (механический) смысл производной. Применение производной для определения скорости процесса, заданного формулой или графиком

Тема 6.6. Применение производной к исследованию функций на монотонность и экстремумы

Возрастание и убывание функции, соответствие возрастания и убывания функции знаку производной. Применение производной к исследованию функций на монотонность и экстремумы

Тема 6.7. Исследование функций и построение графиков

Алгоритм исследования функций и построения ее графика с помощью производной. Построение графиков многочленов с использованием аппарата математического анализа. История развития математического анализа.

Тема 6.8. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке

Нахождение наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке. Применение производной для нахождения наилучшего решения в прикладных задачах, для определения скорости процесса, заданного формулой или графиком.

Тема 6.9 Нахождение оптимального результата с помощью производной в практических задачах

Прикладные задачи, в том числе социально-экономического и физического характера, их решение средствами математического анализа.

Тема 6.10. Решение задач. Производная функции, ее применение

Дифференцирование функций. Исследование функций с помощью производной. Наибольшее и наименьшее значения функции

Раздел 7. Многогранники и тела вращения

Тема 7.1. Многогранники

Понятие многогранника. Его элементы: вершины, ребра, грани. Диагональ. Сечение. Выпуклые и невыпуклые многогранники

Тема 7.2. Призма. Прямая и правильная призмы

Понятие призмы. Ее основания и боковые грани. Высота призмы. Прямая и наклонная призма. Правильная призма. Ее сечение

Тема 7.3. Параллелепипед, куб.

Параллелепипед, свойства прямоугольного параллелепипеда, куб. Сечение куба, параллелепипеда.

Тема 7.4. Пирамида. Правильная пирамида. Усеченная пирамида

Пирамида: n -угольная пирамида, грани и основание пирамиды; боковая и полная поверхность пирамиды; правильная и усеченная пирамида. Элементы пирамиды.

Вычисление элементов многогранников: ребра, диагонали, углы.

Тема 7.5. Боковая и полная поверхность призмы, пирамиды

Площадь боковой поверхности и полной поверхности прямой призмы, площадь оснований, теорема о боковой поверхности прямой призмы. Площадь боковой поверхности и поверхности правильной пирамиды, теорема о площади боковой поверхности усеченной пирамиды.

Тема 7.6. Движение в пространстве. Симметрия в пространстве

Движение в пространстве. Симметрия в пространстве: симметрия относительно точки, прямой, плоскости. Элементы симметрии в пирамидах, параллелепипедах.

Тема 7.7. Правильные многогранники, их свойства

Понятие правильного многогранника; правильная призма и правильная пирамида; правильная треугольная пирамида и правильный тетраэдр; куб. Представление о правильных многогранниках: октаэдр, додекаэдр и икосаэдр. Движение в пространстве.

Тема 7.8 Симметрия в профессии. Сечения многогранников в профессиональных задачах

Симметрия в природе, архитектуре, технике, в быту, в профессии. Использование движений в пространстве при решении профессиональных задач. Сечения призмы и пирамиды. Построение сечений многогранников, используя метод следов. Выполнение выносных плоских чертежей из рисунков простых объемных фигур.

Тема 7.9. Цилиндр, его составляющие. Сечение цилиндра

Цилиндрическая поверхность, образующие цилиндрической поверхности, ось цилиндрической поверхности. Цилиндр: основания и боковая поверхность, образующая и ось; площадь боковой и полной поверхности. Изображение цилиндра на плоскости. Развёртка цилиндра. Сечения цилиндра (плоскостью, параллельной или перпендикулярной оси цилиндра)

Тема 7.10. Конус, его составляющие. Сечение конуса

Коническая поверхность, образующие конической поверхности, ось и вершина конической поверхности. Конус: основание и вершина, образующая и ось; площадь боковой и полной поверхности

Тема 7.11. Усеченный конус. Сечение усеченного конуса

Усечённый конус: образующие и высота; основания и боковая поверхность. Изображение конуса на плоскости. Развёртка конуса. Сечения конуса (плоскостью, параллельной основанию, и плоскостью, проходящей через вершину)

Тема 7.12. Шар и сфера, их сечения

Сфера и шар: центр, радиус, диаметр; площадь поверхности сферы. Взаимное расположение сферы и плоскости; касательная плоскость к сфере. Изображение сферы, шара на плоскости. Сечения шара.

Тема 7.13. Понятие об объеме тела. Объемы многогранников и тел вращения

Понятие об объёме. Основные свойства объёмов тел. Объём пирамиды, призмы цилиндра, конуса. Объём шара и площадь сферы.

Тема 7.14. Объемы и площади поверхностей подобных тел

Подобные тела в пространстве. Соотношения между площадями поверхностей и объёмами подобных тел.

Тема 7.15 Комбинации многогранников и тел вращения

Многогранник, описанный около сферы. Сфера, вписанная в многогранник или в тело вращения. Многогранник, вписанный в тело вращения

Тема 7.16. Геометрические комбинации на практике

Использование комбинаций многогранников и тел вращения на практике.

Тема 7.17. Решение задач. Многогранники и тела вращения

Вычисление величин (длина, угол, объем, площадь поверхности) геометрических фигур, используя изученные формулы и методы.

Раздел 8. Первообразная функции, ее применение

Тема 8.1. Первообразная функции.

Первообразная. Таблица первообразных.

Тема 8.2. Площадь криволинейной трапеции. Формула Ньютона - Лейбница

Интеграл, его геометрический и физический смысл. Вычисление интеграла по формуле Ньютона-Лейбница

Тема 8.3. Определенный интеграл в профессиональной деятельности и жизни

Решение задач на применение интеграла для вычисления физических величин и площадей

Тема 8.4. Решение задач. Первообразная функции, ее применение

Первообразная и интеграл.

Раздел 9. Теория вероятностей и статистика

Тема 9.1 Представление данных и описательная статистика

Представление данных с помощью таблиц и диаграмм. Среднее арифметическое, медиана, наибольшее и наименьшее значения, размах, дисперсия, стандартное отклонение числовых наборов.

Тема 9.2. Составление таблиц и диаграмм на практике

Первичная обработка статистических данных. Графическое их представление. Нахождение средних характеристик, наблюдаемых данных. Применение статистических методов для решения профессиональных задач

Тема 9.3 Операции над событиями, над вероятностями. Условная вероятность

Случайные эксперименты (опыты) и случайные события. Элементарные события (исходы). Вероятность случайного события. Близость частоты и вероятности событий. Случайные опыты с равновозможными элементарными событиями. Вероятности событий в опытах с равновозможными элементарными событиями. Операции над событиями: пересечение, объединение, противоположные события. Диаграммы Эйлера. Формула сложения вероятностей. Условная вероятность. Умножение вероятностей. Дерево случайного эксперимента. Формула полной вероятности. Независимые события.

Тема 9.4 Элементы комбинаторики

Комбинаторное правило умножения. Перестановки и факториал. Число сочетаний. Треугольник Паскаля. Формула бинома Ньютона

Тема 9.5. Вероятность в профессиональных задачах

Вычисление вероятностей с использованием формул комбинаторики. Оценка вероятности события в профессиональной деятельности. Решение профессиональных задач на вероятность события.

Тема 9.6. Серии последовательных испытаний

Бинарный случайный опыт (испытание), успех и неудача. Независимые испытания. Серия независимых испытаний до первого успеха. Серия независимых испытаний Бернулли

Тема 9.7. Случайные величины и распределения. Математическое ожидание случайной величины

Случайная величина. Распределение вероятностей. Диаграмма распределения. Примеры распределений, в том числе, геометрическое и биномиальное. Числовые характеристики случайных величин: математическое ожидание, дисперсия и стандартное отклонение. Примеры применения математического ожидания, в том числе в задачах из повседневной жизни. Математическое ожидание бинарной случайной величины. Математическое ожидание суммы случайных величин. Математическое ожидание и дисперсия геометрического и биномиального распределений

Тема 9.8. Закон больших чисел Непрерывные случайные величины (распределения). Нормальное распределение

Закон больших чисел и его роль в науке, природе и обществе. Выборочный метод исследований. Примеры непрерывных случайных величин. Функция плотности распределения. Равномерное распределение и его свойства. Понятие о нормальном распределении

Тема 9.9. Решение задач комбинаторики, статистики и теории вероятностей

Элементы комбинаторики. Событие, вероятность события. Сложение и умножение вероятностей

Раздел 10. Математический практикум

Тема 10.1 Матрицы и определители.

Способы решения систем линейных уравнений. Понятия: матрица 2×2 и 3×3 , определитель матрицы. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений. Решение прикладных задач. Применение матриц в информатике

Тема 10.2. Элементы векторной алгебры

Компланарные векторы. Разложение вектора по трем некопланарным векторам. Уравнение плоскости. Геометрический смысл определителя 2×2 . Решение прикладных задач

Тема 10.3. Комплексные числа

Понятие комплексного числа. Сопряженные комплексные числа, модуль и аргумент комплексного числа. Форма записи комплексного числа (геометрическая, тригонометрическая, алгебраическая). Арифметические действия с комплексными числами.

Тема 10.4. Графы

Понятие графа. Связный граф, дерево, цикл граф на плоскости. Решение прикладных задач. Применение графа в информатике

Тема 10.5. Задачи математической статистики

Вариационный ряд. Полигон частот и гистограмма. Статистические характеристики ряда наблюдаемых данных

Тема 10.6. Логические операции с множествами

Логические операции. Применение диаграмм Эйлера–Венна для решение теоретико-множественных задач профессиональной направленности, задач информатики и других учебных дисциплин и для описания реальных процессов и явлений

Тема 10.7. Решение задач математического практикума

Применение изученных математических фактов к решению задач из различных областей науки и реальной жизни

3.МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ И ЗАДАНИЯ К ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ И САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЕ

Раздел 10. Математический практикум

Тема 10.1. Матрицы и определители

1.Матрицы и определители

Матрицей размера $(m \times n)$ называется прямоугольная таблица чисел, расположенных в m строках и n столбцах. Например, матрица $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ имеет размер (2×4) . В общем виде матрицу размера $(m \times n)$ записывают так:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Числа a_{ij} ($i=1,2,\dots,m$), ($j=1,2,\dots,n$), входящие в состав данной матрицы, называются ее элементами. Индекс i указывает номер строки, в которой находится элемент, j – номер столбца.

Матрица-строка – это матрица, состоящая из одной строки, матрица-столбец – матрица, состоящая из одного столбца.

Матрица, в которой число строк равняется числу столбцов ($m=n$), называется **квадратной**, число ее строк (столбцов) называется порядком квадратной матрицы.

Элементы $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ квадратной матрицы образуют **главную диагональ матрицы**. Она идет из левого верхнего угла этой матрицы в ее правый нижний угол.

Единичной матрицей E называют квадратную матрицу, у которой элементы, стоящие на главной диагонали, равны единице, а все остальные элементы равны нулю. Например, единичная матрица третьего порядка запишется следующим образом:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для квадратных матриц вводится важнейшая числовая характеристика, которую называют **определителем (детерминантом)** и обозначают одним из символов: Δ , $\det A$, $|A|$.

Рассмотрим сначала квадратную матрицу второго порядка. Ее определителем Δ называется число, равное

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Пример 1: $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = (-2) \cdot 5 - (-3) \cdot 1 = -10 + 3 = -7$.

Рассмотрим теперь определитель третьего порядка.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Вычисление этого определителя может быть сведено к вычислению определителей второго порядка. Для этого введем понятия минора и алгебраического дополнения.

Минором M_{ij} определителя третьего порядка называется определитель второго порядка, получающийся из данного определителя вычеркиванием i -ой строки и j -го столбца.

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} называется минор M_{ij} , взятый со знаком $+$, если сумма $(i+j)$ – четное число, и со знаком $-$, если сумма $(i+j)$ есть нечетное число:

$$A_{ij} = \begin{cases} M_{ij}, & \text{если } (i+j) \text{ четное} \\ -M_{ij}, & \text{если } (i+j) \text{ нечетное} \end{cases}$$

Определитель третьего порядка равен сумме произведений элементов какой-либо строки (столбца) на их алгебраические дополнения:

$$\Delta = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + a_{i3} \cdot A_{i3} = a_{1j} \cdot A_{1j} + a_{2j} \cdot A_{2j} + a_{3j} \cdot A_{3j}.$$

Пример 2: Вычислить определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 5 \end{vmatrix}.$$

Решение: Найдем определитель Δ , используя элементы первой строки этого определителя и их алгебраические дополнения

$$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}.$$

Вычислим A_{11} – алгебраическое дополнение элемента a_{11} , то есть элемента, который находится в первой строке ($i=1$) и в первом столбце ($j=1$). Сумма $i+j = 1+1 = 2$ есть четное число, следовательно, $A_{11} = M_{11}$. Далее, найдем M_{11} . Для этого в определителе Δ вычеркнем первую строку, так как $i=1$, и первый столбец, так как $j=1$. Оставшиеся, невычеркнутые, элементы запишем в виде определителя второго порядка. Получим

$$A_{11} = M_{11} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 - 0 \cdot (-2) = 5.$$

Найдем A_{12} – алгебраическое дополнение элемента a_{12} . Здесь $i=1$, $j=2$. Сумма $i+j = 1+2 = 3$ есть нечетное число, значит $A_{12} = -M_{12}$. Для нахождения M_{12} вычеркнем в определителе Δ первую строку и второй столбец. Из оставшихся чисел составим определитель второго порядка, таким образом,

$$A_{12} = -M_{12} = -\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -(4 \cdot 5 - 3 \cdot (-2)) = -26.$$

Аналогично, находим

$$A_{13} = M_{13} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 4 \cdot 0 - 3 \cdot 1 = -3. \text{ Следовательно,}$$

$$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = 3 \cdot 5 + (-2) \cdot (-26) + 1 \cdot (-3) = 64.$$

Квадратная матрица называется *невыврожденной*, если ее определитель не равен нулю.

2. Система линейных алгебраических уравнений.

Системой линейных алгебраических уравнений называется совокупность линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (1)$$

Здесь $x_1, x_2, \dots, x_n$ – **неизвестные**; $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{mn}$ – заданные числа, которые называют **коэффициентами системы**; $b_1, b_2, \dots, b_m$ – также известные числа, которые называют **свободными членами системы**.

Решением системы (1) называется любая совокупность значений неизвестных $x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, \dots, x_n = \alpha_n$, после подстановки которых в систему все ее уравнения обращаются в верные равенства.

Решить систему уравнений – это значит найти все ее решения.

Система уравнений может иметь единственное решение, в этом случае она называется **совместной определенной**. Если система уравнений имеет бесконечное множество решений, тогда она называется **совместной неопределенной**. Система уравнений, не имеющая решений, называется **несовместной**.

Матричный способ решения системы

Рассмотрим матричный способ решения системы на конкретном примере.

Задача. Показать, что система линейных уравнений имеет единственное решение. Найти его матричным способом. Сделать проверку.

$$\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + x_3 = -2 \\ -3x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 5 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases} \quad (2)$$

Решение: Свяжем с этой системой матрицы A, X, B .

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Матрица A – это матрица, составленная из коэффициентов при неизвестных.

Матрица X есть матрица-столбец из неизвестных.

Матрица B – матрица-столбец, составленная из свободных членов.

Систему уравнений (2) можно записать с помощью этих матриц:

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

или кратко, в матричном виде,

$$A \cdot X = B$$

Поясним, как матрицу A умножить на матрицу-столбец X . Заметим вначале, что результат произведения $A \cdot X$ есть **матрица-столбец** из трех элементов. Для того, чтобы получить первый элемент (в первой строке) этой матрицы, возьмем первую строку матрицы A – это числа 3; -3; 1, и умножим их соответственно на элементы столбца x_1, x_2, x_3 матрицы неизвестных X , затем полученные произведения сложим: $3 \cdot x_1 + (-3) \cdot x_2 + 1 \cdot x_3$. Аналогично, поступим со второй и третьей строками матрицы A . Таким образом,

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 - 3x_2 + 1x_3 \\ -3x_1 + 5x_2 - 2x_3 \\ 1x_1 + 2x_2 + 2x_3 \end{pmatrix}$$

Заметим, что мы получили матрицу, элементы которой есть ни что иное, как левые части уравнений нашей системы (2).

Две **матрицы называются равными**, если у них соответствующие (стоящие на одинаковых местах) элементы равны.

В нашем случае матрица $A \cdot X$ равна матрице B :

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} 3x_1 - 3x_2 + 1x_3 \\ -3x_1 + 5x_2 - 2x_3 \\ 1x_1 + 2x_2 + 2x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} = B$$

Действительно, равенства соответствующих элементов этих матриц есть уравнения нашей системы. Таким образом мы показали, что систему (2) можно записать в виде $A \cdot X = B$.

Решение системы (2) также можно записать с помощью матриц. Для этого введем понятие обратной матрицы.

Матрица A^{-1} называется **обратной** для квадратной невырожденной матрицы A , если $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$, где E единичная матрица такого же порядка, что и матрица A .

Отметим, что умножение матриц A и A^{-1} происходит по тому же принципу, что и описанный выше, а именно: матрицу A умножим на первый столбец матрицы A^{-1} получим первый столбец матрицы произведения $A \cdot A^{-1}$, затем матрицу A умножим на второй столбец матрицы A^{-1} , получим второй столбец матрицы произведения, аналогично получим третий столбец.

Далее, если матрица A невырожденная ($\Delta \neq 0$), то система (2) имеет единственное решение и его можно найти по формуле $X=A^{-1} \cdot B$, где обратную матрицу A^{-1} можно записать, используя алгебраические дополнения:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

Следует обратить внимание на то, что алгебраические дополнения, соответствующие элементам строк данной матрицы A , располагаются в столбцах с теми же номерами, что и строки.

Покажем, что наша система имеет единственное решение, и найдем его.

Сначала найдем все алгебраические дополнения (более подробные разъяснения см. в примере 2).

$$A_{11} = M_{11} = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 10 - 4 = 6$$

$$A_{12} = -M_{12} = - \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(-6 + 2) = 4$$

$$A_{13} = M_{13} = \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 6 - 5 = 1$$

$$A_{21} = -M_{21} = - \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = -(-6 + 2) = 4$$

$$A_{22} = M_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 1 = 5$$

$$A_{23} = -M_{23} = - \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -(-6 + 3) = 3$$

$$A_{31} = M_{31} = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -5 & -2 \end{vmatrix} = 6 - 5 = 1$$

$$A_{32} = -M_{32} = - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = -(-6 + 3) = 3$$

$$A_{33} = M_{33} = \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = 15 - 9 = 6$$

Найдем определитель матрицы A .

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix}$$

Для вычисления определителя используем его разложение по элементам первой строки:

$$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}.$$

Тогда

$$\Delta = 3 \cdot 6 + (-3) \cdot 4 + 1 \cdot 1 = 18 - 12 + 1 = 7.$$

Видим, что $\Delta = 7 \neq 0$. Значит, наша система имеет **единственное решение**.

Составим A^{-1} :

$$A^{-1} = \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 4 & 1 \\ 4 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Найдем решение данной системы уравнений:

$$\begin{aligned} X = A^{-1}B &= \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 4 & 1 \\ 4 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 6 \cdot (-2) + 4 \cdot 5 + 1 \cdot (-1) \\ 4 \cdot (-2) + 5 \cdot 5 + 3 \cdot (-1) \\ 1 \cdot (-2) + 3 \cdot 5 + 6 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} -12 + 20 - 1 \\ -8 + 25 - 3 \\ -2 + 15 - 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 14 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} \cdot 7 \\ \frac{1}{7} \cdot 14 \\ \frac{1}{7} \cdot 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Здесь, в последнем действии, мы воспользовались правилом **умножения матрицы на число**: нужно каждый элемент матрицы умножить на это число (в примере это число $\frac{1}{7}$).

Далее, из равенства матриц

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

Проверка: имеем $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$.

Подставим найденные значения неизвестных x_1, x_2, x_3 в каждое уравнение системы

$$\begin{cases} 3 \cdot 1 - 3 \cdot 2 + 1 = -2 \\ -3 \cdot 1 + 5 \cdot 2 - 2 \cdot 1 = 5 \\ 1 - 2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = -1 \end{cases}$$

Все равенства верные. **Ответ:** (1; 2; 1) – единственное решение системы.

Тема 10.3. Комплексные числа

Понятие комплексного числа

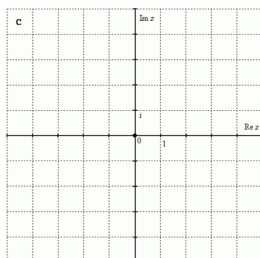
Комплексное число – это двумерное число. Оно имеет вид $z = a + bi$, где a и b – действительные числа, i – так называемая *мнимая единица*.

Число a называется *действительной частью* ($\operatorname{Re} z$) комплексного числа z , число b называется *мнимой частью* ($\operatorname{Im} z$) комплексного числа z .

$a + bi$ – это ЕДИНОЕ ЧИСЛО, а не сложение. Действительную и мнимую части комплексного числа, в принципе, можно переставить местами: $z = bi + a$ или переставить мнимую единицу: $z = a + ib$ – от этого комплексное число не изменится.

Но стандартно комплексное число принято записывать именно в таком порядке: $z = a + bi$

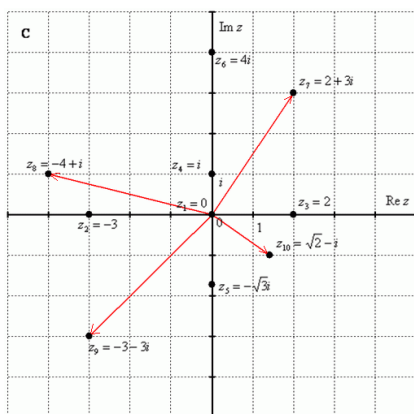
Комплексные числа изображаются на *комплексной плоскости*:



Множество же комплексных чисел принято обозначать «жирной» или утолщенной буквой $\mathbb{C}$. Комплексная плоскость состоит из двух осей: $\operatorname{Re} z$ – действительная ось $\operatorname{Im} z$ – мнимая ось

Построим на комплексной плоскости следующие комплексные числа:

$z_1 = 0$, $z_2 = -3$, $z_3 = 2$, $z_4 = i$, $z_5 = -\sqrt{3}i$, $z_6 = 4i$, $z_7 = 2 + 3i$, $z_8 = -4 + i$, $z_9 = -3 - 3i$, $z_{10} = \sqrt{2} - i$



Действительные числа – это частный случай комплексных чисел.

Действительная ось $\operatorname{Re} z$ обозначает в точности множество действительных чисел $\mathbb{R}$, то есть на оси $\operatorname{Re} z$ сидят все наши «обычные» числа. Более строго утверждение можно сформулировать так: Множество действительных чисел $\mathbb{R}$ является **подмножеством** множества комплексных чисел $\mathbb{C}$.

Числа $z_1 = 0$, $z_2 = -3$, $z_3 = 2$ — это комплексные числа с нулевой мнимой частью.

Числа $z_4 = i$, $z_5 = -\sqrt{3}i$, $z_6 = 4i$ — это, наоборот, *чисто мнимые числа*, т.е. числа с нулевой действительной частью. Они располагаются строго на мнимой оси $\text{Im } z$.

В числах $z_7 = 2 + 3i$, $z_8 = -4 + i$, $z_9 = -3 - 3i$, $z_{10} = \sqrt{2} - i$ и действительная и мнимая части не равны нулю. Такие числа тоже обозначаются точками на комплексной плоскости, при этом, к ним принято проводить радиус-векторы из начала координат (обозначены красным цветом на чертеже). Радиус-векторы к числам, которые располагаются на осях, обычно не чертят, потому что они сливаются с осями.

Алгебраическая форма комплексного числа. Сложение, вычитание, умножение и деление комплексных чисел

$z = a + bi$ — это и есть алгебраическая форма комплексного числа.

Действия с комплексными числами не представляют особых сложностей и мало чем отличаются от обычной алгебры.

Сложение комплексных чисел

Сложить два комплексных числа $z_1 = 1 + 3i$, $z_2 = 4 - 5i$

Для того чтобы сложить два комплексных числа нужно сложить их действительные и мнимые части:

$$z_1 + z_2 = 1 + 3i + 4 - 5i = 5 - 2i$$

Вычитание комплексных чисел

Найти разности комплексных чисел $z_1 - z_2$ и $z_2 - z_1$, если $z_1 = -2 + i$, $z_2 = \sqrt{3} + 5i$

Действие аналогично сложению, единственная особенность состоит в том, что вычитаемое нужно взять в скобки, а затем — стандартно раскрыть эти скобки со сменой знака:

$$z_1 - z_2 = -2 + i - (\sqrt{3} + 5i) = -2 + i - \sqrt{3} - 5i = -2 - \sqrt{3} - 4i$$

Результат не должен смущать, у полученного числа две, а не три части.

Просто действительная часть — составная: $-2 - \sqrt{3}$. Для наглядности ответ можно переписать так: $z_1 - z_2 = (-2 - \sqrt{3}) - 4i$.

Рассчитаем вторую разность:

$$z_2 - z_1 = \sqrt{3} + 5i - (-2 + i) = \sqrt{3} + 5i + 2 - i = 2 + \sqrt{3} + 4i$$

Здесь действительная часть тоже составная: $2 + \sqrt{3}$

Чтобы не было какой-то недосказанности, приведу короткий пример с «нехорошей» мнимой частью: $-1 + \sqrt{2}i + 7 - 3i = 6 + (\sqrt{2} - 3)i$. Вот здесь без скобок уже не обойтись.

Умножение комплексных чисел

$$i^2 = -1$$

Найти произведение комплексных чисел $z_1 = 1 - i$, $z_2 = 3 + 6i$

Очевидно, что произведение следует записать так: $z_1 \cdot z_2 = (1 - i)(3 + 6i)$

$$z_1 \cdot z_2 = (1 - i)(3 + 6i) = 1 \cdot 3 - i \cdot 3 + 1 \cdot 6i - i \cdot 6i = 3 - 3i + 6i - 6i^2 = 3 - 3i + 6i + 6 = 9 + 3i$$

Как и сумма, произведение комплексных чисел перестановочно, то есть справедливо равенство: $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$.

Деление комплексных чисел

Для выполнения этого действия нам понадобится понятие **сопряжённого комплексного числа**. Число $x - yi$ называют *сопряжённым* для числа $x + yi$. Таким образом, $x + yi$, $x - yi$ – это пара *сопряженных* чисел.

Даны комплексные числа $z_1 = 13 + i$, $z_2 = 7 - 6i$. Найти частное $\frac{z_1}{z_2}$.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{13 + i}{7 - 6i}$$

Составим частное:

Деление чисел осуществляется **методом умножения знаменателя и числителя на сопряженное знаменателю число**.

В знаменателе находится число вида $x - yi$, поэтому сопряженным для него является $x + yi$, то есть $7 + 6i$.

Согласно правилу, знаменатель нужно умножить на $7 + 6i$, **и чтобы ничего не изменилось**, домножить числитель на то же самое число $7 + 6i$:

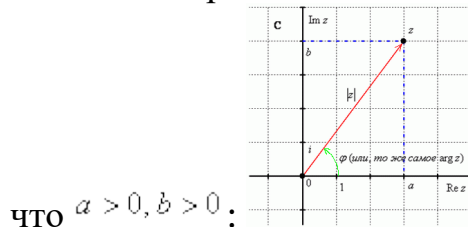
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(13 + i)(7 + 6i)}{(7 - 6i)(7 + 6i)}$$

Далее в числителе нужно раскрыть скобки (перемножить два числа по правилу, рассмотренному в предыдущем пункте). А в знаменателе воспользоваться формулой $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$.

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{(13 + i)(7 + 6i)}{(7 - 6i)(7 + 6i)} = \frac{91 + 7i + 78i + 6i^2}{7^2 - (6i)^2} = \frac{91 + 7i + 78i - 6}{49 - (-36)} = \\ &= \frac{85 + 85i}{49 + 36} = \frac{85 + 85i}{85} = 1 + i \end{aligned}$$

Тригонометрическая форма комплексного числа

Любое комплексное число (кроме нуля) $z = a + bi$ можно записать в тригонометрической форме: $z = |z| \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi)$, где $|z|$ – это **модуль комплексного числа**, а φ – **аргумент комплексного числа**. Изобразим на комплексной плоскости число $z = a + bi$. Для определённости и простоты объяснений расположим его в первой координатной четверти, т.е. считаем,



что $a > 0, b > 0$:

Модулем комплексного числа z называется расстояние от начала координат до соответствующей точки комплексной плоскости. Попросту говоря, **модуль** – это **длина радиус-вектора**.

Модуль комплексного числа z стандартно обозначают: $|z|$ или r

По теореме Пифагора легко вывести формулу для нахождения модуля комплексного числа: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

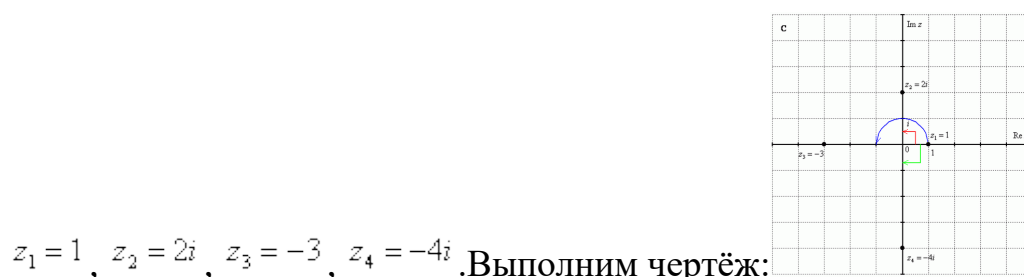
Аргументом комплексного числа z называется **угол φ** между положительной полуосью действительной оси $\text{Re } z$ и радиус-вектором, проведенным из начала координат к соответствующей точке. Аргумент не определён для единственного числа: $z = 0$.

Аргумент комплексного числа z стандартно обозначают: φ или $\arg z$

Из геометрических соображений получается следующая формула для

нахождения аргумента: $\arg z = \arctg \frac{b}{a}$. **Внимание!** Данная формула работает только в правой полуплоскости! Если комплексное число располагается не в 1-й и не 4-й координатной четверти, то формула будет немного другой.

Представить в тригонометрической форме комплексные числа:



$z_1 = 1$, $z_2 = 2i$, $z_3 = -3$, $z_4 = -4i$. Выполним чертёж:

1) Представим в тригонометрической форме число $z_1 = 1$. Найдем его модуль и аргумент. $|z_1| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + 0^2} = \sqrt{1} = 1$. Таким образом, число в тригонометрической форме: $z_1 = \cos 0 + i \sin 0$.

Ясно обратное проверочное действие: $z_1 = \cos 0 + i \sin 0 = 1 + i \cdot 0 = 1$

2) Представим в тригонометрической форме число $z_2 = 2i$. Найдем его модуль и аргумент. $|z_2| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{0^2 + 2^2} = \sqrt{4} = 2$. Очевидно, что $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$ (или 90 градусов). Таким образом, число в тригонометрической форме:

$$z_2 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) \quad \text{.проверка:} \quad z_2 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) = 2(0 + i \cdot 1) = 2i$$

3) Представим в тригонометрической форме число $z_3 = -3$. Найдем его модуль и аргумент. Очевидно, что $|z_3| = 3$. $|z_3| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(-3)^2 + 0^2} = \sqrt{9} = 3$. Очевидно, что $\varphi_3 = \pi$ (или 180 градусов). Таким образом, число в тригонометрической форме: $z_3 = 3(\cos \pi + i \sin \pi)$.

Проверка: $z_3 = 3(\cos \pi + i \sin \pi) = 3(-1 + i \cdot 0) = -3$

4) Представим в тригонометрической форме число $z_4 = -4i$. Найдем его модуль и аргумент. Очевидно, что $|z_4| = 4$. $|z_4| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{0^2 + (-4)^2} = \sqrt{16} = 4$.

Аргумент можно записать двумя способами: Первый способ: $\varphi_4 = \frac{3\pi}{2}$ (270

градусов), и, соответственно: $z_4 = 4 \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right)$.

Проверка: $z_4 = 4 \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right) = 4(0 + i \cdot (-1)) = -4i$

Однако более стандартно следующее правило: **Если угол больше 180 градусов**, то его записывают со знаком минус и противоположной

ориентацией («прокруткой») угла: $\varphi_4 = -\frac{\pi}{2}$ (минус 90 градусов). Легко

заметить, что $\varphi_4 = \frac{3\pi}{2}$ и $\varphi_4 = -\frac{\pi}{2}$ — это один и тот же угол.

Таким образом, запись принимает вид: $z_4 = 4 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right)$

Раздел 9. Теории вероятностей и математическая статистика

Методические указания к практическим занятиям и самостоятельной работе

Классическое определение вероятности: Вероятностью события A называется число $P(A)$, равное отношению числа элементарных исходов испытания m , благоприятствующих событию A , к общему числу n несовместных, равновозможных, единственно возможных исходов.

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Иногда, для вычисления m и n применяются следующие правила комбинаторики.

Правило суммы: Пусть события A и B несовместны. Если событие A может осуществиться k_1 способами, а событие B – k_2 способами, то событие « A или B » может осуществиться $k_1 + k_2$ способами.

Правило произведения: Если событие A может осуществиться k_1 способами, а независимое от него событие B – k_2 способами, то событие « A и B » может осуществиться $k_1 \cdot k_2$ способами.

Перестановками называют комбинации, состоящие из одних и тех же n различных элементов и отличающиеся только порядком их расположения. Число всех возможных перестановок

$$P_n = n!,$$

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n, \quad 0! = 1 \text{ (по определению).}$$

Размещениями называют комбинации, составленные из n различных элементов по m элементов, которые отличаются либо составом элементов, либо их порядком. Число всех возможных размещений равно

$$A_n^m = n(n-1)(n-2) \cdots (n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

Сочетаниями называются комбинации, составленные из n различных элементов по m элементов, которые отличаются хотя бы одним элементом. Число сочетаний

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Если испытание проведено n раз и при этом случайное событие A наступило в m случаях, тогда *относительной частотой* наступления события A называется число

$$W(A) = \frac{m}{n}.$$

Если при увеличении числа испытаний относительная частота незначительно отличается от фиксированного числа p , то это число называют *статистической вероятностью* события A .

Теорема сложения вероятностей несовместных событий

Вероятность суммы двух несовместных событий A и B равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

Сумма вероятностей противоположных событий равна единице:

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1.$$

Теорема умножения вероятностей независимых событий

Вероятность произведения двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$$

Для трех независимых событий

$$P(A \cdot B \cdot C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C).$$

Теорема умножения вероятностей зависимых событий

Вероятность произведения двух зависимых событий равна произведению вероятности первого события на условную вероятность второго:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P_A(B).$$

Условная вероятность $P_A(B)$ – это вероятность события B при условии, что событие A уже произошло.

Вероятность произведения трех событий равна

$$P(A \cdot B \cdot C) = P(A) \cdot P_A(B) \cdot P_{AB}(C).$$

Теорема сложения вероятностей совместных событий

Вероятность суммы двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их произведения:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Повторение независимых испытаний

Пусть известна вероятность появления события A в каждом испытании:

$P(A) = p$, тогда $P(\bar{A}) = 1 - p = q$ – вероятность не появления события A . Испытание повторяется n раз. Требуется найти вероятность того, что событие A наступит при этом ровно k раз.

Обозначим $P_n(k)$ – вероятность того, что в n испытаниях событие A наступит k раз. Эта вероятность находится по формуле Бернулли:

$$P_n(k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot p^k \cdot q^{n-k},$$

! - знак факториала, математической операции такой, что

$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$. Например, $1! = 1$

$$2! = 1 \cdot 2 = 2$$

Внимание: $0! = 1$

$$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$$

$$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$$

$$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120 \text{ и т. д.}$$

Наивероятнейшее число появлений события

Пусть в n повторных испытаниях событие A появляется k раз, где k может принимать значения: $0; 1; 2; \dots; n$ (то есть $0 \leq k \leq n$). Для каждого из этих значений k можно найти соответствующую ему вероятность по формуле Бернулли.

Значение k , которому соответствует самая большая вероятность, называется наивероятнейшим числом появления события A .

Наивероятнейшее число k_0 находится как целое число из промежутка:

$$np - q \leq k_0 \leq np + p.$$

При этом k_0 может принимать либо одно значение, либо два соседних целых значения с одинаковой вероятностью.

Вероятность $P_n(k_0)$, соответствующую значению $k = k_0$, находим по формуле Бернулли.

Появление события хотя бы один раз

Вероятность появления события «хотя бы один раз» в n испытаниях находится с помощью противоположного ему события «ни одного раза»:

$P_n(\text{событие наступит хотя бы один раз}) = 1 - P_n(\text{ни разу})$

$$= 1 - P_n(0) = 1 - \frac{n!}{0! \cdot n!} \cdot p^0 \cdot q^{n-0} = 1 - q^n,$$

при этом учтено, что $0! = 1$ и $p^0 = 1$.

Событие наступит «хотя бы один раз» означает, что оно наступит один или более раз, поэтому можно записать:

$$P_n(k \geq 1) = 1 - q^n.$$

Задача. Стрелок поражает цель с вероятностью 0,7. С какой вероятностью в серии из 5 выстрелов он поразит мишень:

а) ровно два раза;

б) более трех раз;

в) хотя бы один раз;

г) указать наименее вероятное число попаданий и соответствующую ему вероятность.

Решение. По условию задачи: $p = 0,7$; $n = 5$; $k = 2$; $m = 3$;

вероятность промаха $q = 1 - p = 1 - 0,7 = 0,3$.

а) Вероятность попадания ровно два раза в серии из пяти выстрелов находим по формуле Бернулли:

$$\begin{aligned} P_5(2) &= \frac{5!}{2!(5-2)!} \cdot p^2 \cdot q^3 = \frac{5!}{2!3!} \cdot 0,7^2 \cdot 0,3^3 = \\ &= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 0,49 \cdot 0,027 = 10 \cdot 0,01323 = 0,1323. \end{aligned}$$

б) Событие «стрелок поразит мишень более трех раз» запишем в виде: $m > 3$, тогда

$$P_5(m > 3) = P_5(4 \text{ или } 5) = P_5(4) + P_5(5).$$

Здесь применена теорема сложения вероятностей несовместных событий.

Используя формулу Бернулли, найдем:

$$P_5(4) = \frac{5!}{4!(5-4)!} \cdot p^4 \cdot q^1 = \frac{5!}{4!1!} \cdot 0,7^4 \cdot 0,3 = 5 \cdot 0,2401 \cdot 0,3 = 0,36015;$$

$$P_5(5) = \frac{5!}{5!0!} \cdot p^5 \cdot q^0 = 1 \cdot p^5 \cdot 1 = 0,7^5 = 0,16807;$$

$$P_5(m > 3) = 0,36015 + 0,16807 = 0,52822.$$

в) Событию D – «стрелок поразит мишень хотя бы 1 раз», противоположно событие $\bar{D}$ – «не поразит ни разу», то есть стрелок промахнется все пять раз, следовательно, число попаданий $k = 0$:

$$P(D) = 1 - P(\bar{D}) = 1 - P_5(0) = 1 - \frac{5!}{0!5!} \cdot p^0 \cdot q^5 = 1 - q^5 =$$

$$= 1 - 0,3^5 = 1 - 0,00243 = 0,99757. \text{ Здесь учтено, что } 0! = 1 \text{ и } p^0 = 1.$$

г) Наивероятнейшее число попаданий k_0 находим как целое число из промежутка:

$$np - q \leq k_0 \leq np + p;$$

$$5 \cdot 0,7 - 0,3 \leq k_0 \leq 5 \cdot 0,7 + 0,7;$$

$$3,2 \leq k_0 \leq 4,2;$$

$$k_0 = 4.$$

Соответствующую ему вероятность $P_5(4)$ вычислим по формуле Бернулли. В данной задаче она уже была найдена выше:

$$P_5(4) = \frac{5!}{4! \cdot 1!} \cdot 0,7^4 \cdot 0,3 = 0,36015.$$

Дискретная случайная величина.

Дискретная случайная величина может быть задана *законом распределения*, который представляют в табличном виде, где x_i – возможные значения случайной величины X , $p_i = P(X = x_i)$.

X	x_1	x_2	x_3	$\dots$	x_n
P	p_1	p_2	p_3	$\dots$	p_n

При этом выполняется условие:

$$p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n = 1.$$

Функцией распределения случайной величины X называется функция $F(x)$, выражающая для каждого x вероятность того, что случайная величина X примет значение, меньшее x :

$$F(x) = P(X < x).$$

Функция распределения $F(x)$ дискретной случайной величины является кусочно-постоянной, непрерывной слева и в точках x_i возрастает скачком на величину p_i .

Математическим ожиданием дискретной случайной величины X называется сумма произведений всех ее возможных значений на их вероятности:

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + \dots + x_n p_n.$$

Дисперсией случайной величины называется математическое ожидание квадрата отклонения:

$$D(X) = M(X - M(X))^2.$$

При вычислении дисперсии также применяется формула:

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2,$$

$$M(X^2) = x_1^2 p_1 + x_2^2 p_2 + x_3^2 p_3 + \dots + x_n^2 p_n.$$

Средним квадратическим отклонением случайной величины X называется квадратный корень из дисперсии:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

Случайная величина X имеет биномиальный закон распределения, если она принимает значения $0, 1, \dots, n$ с вероятностями

$$P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k},$$

$$p, q > 0, p + q = 1, k = 0, 1, \dots, n.$$

В этом случае

$$M(X) = np, D(X) = npq.$$

Элементы математической статистики

Для дискретных случайных величин данные выборки записываются в виде таблицы, называемой дискретным статистическим распределением выборки.

x_i	x_1	x_2	$\dots$	x_m
n_i	n_1	n_2	$\dots$	n_m

В первой строке перечислены различные значения выборки, называемые вариантами. Во второй строке указаны частоты n_i , которые показывают, сколько раз наблюдалось каждое значение x_i .

Сумма всех частот n_i равна объему выборки n :

$$n_1 + n_2 + \dots + n_m = n.$$

Вместо частот могут использоваться относительные частоты w_i

$$w_i = \frac{n_i}{n}, \quad w_1 + w_2 + \dots + w_m = 1.$$

Полигоном частот или относительных частот называется ломаная, построенная по точкам с координатами (x_i, n_i) или (x_i, w_i) , соответственно. Полигон обычно используют для изображения дискретного статистического распределения.

Для непрерывных случайных величин строят интервальное статистическое распределение

$[x'_{i-1}, x'_i)$	$[x_{min}, x'_1)$	$[x'_1, x'_2)$	$\dots$	$[x'_{m-1}, x_{max}]$
x_i^*	x_1^*	x_2^*	$\dots$	x_m^*
n_i	n_1	n_2	$\dots$	n_m

Где x_i^* – середины интервалов $[x'_{i-1}, x'_i)$, на которые разбит диапазон изменения $[x_{min}, x_{max}]$ всех значений выборки, n_i – число значений выборки, попавших в интервал $[x'_{i-1}, x'_i)$.

Число интервалов группирования рекомендуется выбирать в пределах от 5 до 17 в зависимости от объема выборки, используя, например, формулу Стержеса:

$$m \approx 1 + 3,3221 \cdot \lg n.$$

Гистограмма представляет собой ступенчатую фигуру из прямоугольников с основаниями $\Delta_i = x'_{i-1} - x'_i$, и высотами

$$l_i = \frac{n_i}{\Delta_i} \quad \text{или} \quad h_i = \frac{w_i}{\Delta_i}, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Площадь всех прямоугольников гистограммы равна n , в первом случае и единице, во втором.

Медианой $\widetilde{Me}$ статистического распределения называется значение выборки x_i , приходящееся на середину ранжированного ряда значений выборки.

Модой $\widetilde{Mo}$ статистического распределения называется вариант, которому соответствует наибольшая частота

Основные числовые характеристики статистического распределения выборки

Выборочная средняя статистического распределения $\bar{x}_B$ находится по формуле

$$\bar{x}_B = \frac{1}{n} (x_1 n_1 + x_2 n_2 + \dots + x_m n_m).$$

Для вычисления средней $\bar{x}_B$ интервального статистического распределения вместо значений x_i следует использовать значения x_i^* , определяющие середины интервалов группировки.

Выборочная дисперсия D_B статистического распределения определяется формулой

$$D_B = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m (x_i - \bar{x})^2 n_i.$$

Для вычисления выборочной дисперсии удобнее пользоваться формулой:

$$D_B = \overline{x_B^2} - (\bar{x}_B)^2,$$

$$\overline{x_B^2} = \frac{1}{n} (x_1^2 n_1 + x_2^2 n_2 + \dots + x_m^2 n_m).$$

Выборочное среднее квадратическое отклонение равно

$$\sigma_B = \sqrt{D_B}.$$

Исправленная выборочная дисперсия s^2 и исправленное среднее квадратическое отклонение s находятся по формулам:

$$s^2 = \frac{n}{n-1} D_B,$$

$$s = \sqrt{s^2}.$$

Оценки $\bar{x}_B$, s^2 , s являются несмещенными и состоятельными оценками математического ожидания, дисперсии и среднего квадратического отклонения генеральной совокупности значений признака X .

ЗАДАНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

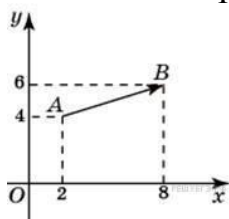
Раздел 1. Повторение курса математики основной школы

$$24 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}$$

1. Найдите значение выражения
2. Магазин закупает цветочные горшки по оптовой цене 120 рублей за штуку и продает с наценкой 20%. Какое наибольшее число таких горшков можно купить в этом магазине на 1000 рублей?
3. В среднем из каждых 100 поступивших в продажу аккумуляторов 91 аккумулятор заряжен. Найдите вероятность того, что купленный аккумулятор не заряжен.
4. Решите уравнение $10x^2 - 12x + 1 = -10x^2$.
5. Решите неравенство: $9x - 4(2x+1) > -8$.

$$a(36a^2 - 25) \left(\frac{1}{6a+5} - \frac{1}{6a-5} \right) \text{ при } a = 36,7$$

6. Найдите значение выражения
7. Найдите квадрат длины вектора.
8. В прямоугольном треугольнике один из катетов равен 1, а острый угол, прилежащий к нему, равен 45° . Найдите площадь треугольника
9. Угол A параллелограмма ABCD в 4 раза меньше угла B. Найдите угол D.



Раздел 2. Степени и корни. Степенная функция, показательная и логарифмическая Функции

Степенная функция

1. Упростить $(343 \cdot a^{-6})^{-\frac{1}{3}}$ и вычислить при $a = 7\sqrt{7}$.
2. Упростить $\frac{\sqrt[7]{y^{3 \cdot \sqrt[3]{y^2}}}}{y^{-\frac{31}{21}}}$ и вычислить при $y = \sqrt{10}$.
3. Вычислить: $(0,25)^{-1} \cdot \left(1\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^3 : \left(-\frac{2}{5}\right)^{-3} - 23 \cdot 2^{-7}$.
4. Упростить: $\left(\frac{x^{-0,5} - x^{-1,5}}{1 - x^{-1}} - 1\right) \cdot \frac{x^{-0,5} + 1}{x^{-1} - 1}$.
5. Упростить: $\sqrt{4 - \frac{8}{a} + \frac{4}{a^2} \cdot \frac{a \cdot \sqrt{a}}{1-a}}$, при $a > 1$.

Показательная функция

1. При каком значении a функция $y = a^x$ бывает на всей области определения?
2. Функция задана формулой: $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$. Чему равно $f(-2)$?
3. Вычислить $9^{2+0,5 \cdot \log_3 10}$
4. Решить показательное уравнение $3^{x-1} = 3^x \cdot 3^{x-1}$
5. Решить показательное неравенство $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1+x}{1-x}} \geq 243$

Логарифмическая функция

1. Решить логарифмическое уравнение $\log_4(x+5) + \log_4(x+4) = \log_4 6$
2. Решить логарифмическое неравенство $\log_2(4x-3) > \log_2(x-7)$
3. Укажите область определения функции $f(x) = \lg \frac{2x-3}{x+7}$
4. Расположить в порядке возрастания: $\log_{0,5} 4$; $\log_{0,5} 0,4$; $\log_{0,5} \frac{1}{4}$;

Уравнения и неравенства (итоговая)

1. Какое число является корнем уравнения $\log_2(x+1) = 1$
2. Какие из уравнений имеют более одного корня?
А) $x^2 - 6x + 5 = 0$; Б) $3x + 2 = 9$; В) $(x-4)(x+3)(x-8) = 0$; Г) $2x - 7 = 0$.
3. Определите вид уравнения $\sqrt{-32-x} = 2$.
А) линейное; Б) квадратное; В) иррациональное; Г) рациональное.
4. Определите наименьшее целое решение неравенства $5x + 2 < 1$?
5. Найдите корень уравнения $|x-3| = 2$
6. Решите систему уравнений $\begin{cases} x - y = 8, \\ 2^{x-3y} = 16. \end{cases}$
 $\frac{2x^2 - 5x}{x-3} \leq x$.
7. Решите неравенство $\frac{2x^2 - 5x}{x-3} \leq x$
8. Решите уравнение $(2x-3)\sqrt{3x^2 - 5x - 2} = 0$
9. Решите уравнение $2\sin^2 x - \sqrt{3}\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0$. Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.

Раздел 3 Прямые и плоскости в пространстве.

1. Верно ли, что если концы отрезка лежат в данной плоскости, то и его середина лежит в этой плоскости?
2. Точка М не лежит в плоскости треугольника ABC, К - середина MB. Каково взаимное расположение прямых MA и CK?
3. Какие из данных утверждений являются аксиомами стереометрии? (возможно несколько ответов)
 - 1) Через две пересекающиеся прямые проходит плоскость и притом только одна.
 - 2) Если две точки прямой лежат в плоскости, то все точки прямой лежат в этой плоскости.
 - 3) Через любые три точки, не лежащие на прямой, проходит плоскость.
 - 4) Через прямую проходит бесконечное количество плоскостей.
 - 5) Две плоскости не могут иметь только две общие точки.
 - 6) Через прямую и не лежащую на ней точку проходит плоскость и притом только одна.
 - 7) Если две плоскости имеют общую точку, то они имеют общую прямую.

4. Могут ли три прямые иметь общую точку, но не лежать в одной плоскости?
5. Решите задачу: Основание AD трапеции ABCD лежит в плоскости α . Через точки B и C проведены параллельные прямые, пересекающие плоскость α в точках E и F соответственно. 1) Докажите, что BCFE - параллелограмм. 2) Каково взаимное положение прямых EF и AB? Чему равен угол между ними, если угол ABC равен 150° ?

Раздел 4. Координаты и векторы

1. Изобразить в пространственной системе координат точку M (2; 3; 5) и радиус-вектор $\vec{OM}$. Записать вектор $\vec{OM}$ как сумму составляющих по координатным осям в базисе $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.
2. Даны точки A(1; -2; 4) и B(6; 0; 1). Найти вектор $\vec{AB}$, его длину и направляющие косинусы.
3. Даны векторы $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$ и $\vec{b} = 4\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$. Найти векторы $\vec{a} + \vec{b}$ и $4\vec{a} - 3\vec{b}$.
4. Найти скалярное произведение векторов $\vec{a} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$ и $\vec{b} = 5\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$, а также косинус угла между ними.
5. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку M(3; -4; 1) перпендикулярно вектору $\vec{N} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 5\vec{k}$.

Раздел 5. Основы тригонометрии. Тригонометрические функции

1. Дано $\sin \alpha = -0,3$; $\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$.
Найти значения остальных тригонометрических функций, а также $\cos 2\alpha$.
2. Вычислить: $\cos(-1140^\circ)$.
3. Решить уравнение: $\operatorname{tg}^2 6x - \operatorname{tg} 6x = 0$.
4. Решить уравнение: $\cos 2x + \cos x + 1 = 0$.
5. Упростить: $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \alpha (\cos^2 \alpha + 1)$.

Раздел 6. Производная функции, ее применение

1. Найдите точку минимума функции $y = (x+3)^2(x+5) - 1$.
2. Найдите наименьшее значение функции $y = 5\operatorname{tg} x - 5x + 6$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.
3. Найдите точку максимума функции $y = (x^2 - 10x + 10)e^{5-x}$.
4. Найдите наименьшее значение функции $y = 2^{x^2+2x+5}$.
5. Найдите наименьшее значение функции $y = 4x - 4\ln(x+7) + 6$ на отрезке $[-6; 5]$.

Раздел 7. Многогранники и тела вращения

Задача 1. Отрезок AD перпендикулярен к плоскости равнобедренного треугольника ABC. Известно, что $AB = AC = 5\text{ см}$, $BC = 6\text{ см}$, $AD = 12\text{ см}$. Найти расстояние от точек A и D до прямой BC.

Задача 2. Дан прямоугольный параллелепипед с ребрами длиной 6, 8 и 7 см. Найти его объем V, площадь полной поверхности P и длину диагонали d.

Задача 3. В основании правильной четырехугольной пирамиды лежит квадрат со стороной 8 см. Её высота 3 см. Найти объем пирамиды V и площадь её полной поверхности P.

Задача 4. Дан правильный тетраэдр с длиной ребра $a = 6\text{ см}$. Найти его объем V и площадь полной поверхности P.

Задача 5. Найти объем V и площадь полной поверхности P для прямого кругового цилиндра с радиусом основания $R = 4\text{ см}$ и высотой $H = 5\text{ см}$.

Раздел 8. Первообразная функции, ее применение

1. Найти

$$\int \sin\left(\frac{1-2x}{3}\right) dx. \quad \int e^{1-\frac{1}{3}x} dx$$

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

а. $y = x^2 - 6x + 5$ и $y = x - 1$

в. $y = 3x^2 - 2$; и $y = 3x + 4$.

с. $y = (1/3) \cdot x^3$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$

Раздел 9. Теория вероятностей и математическая статистика

1: Из хорошо перетасованной колоды наудачу извлекается карта. (Всего в колоде 36 карт). Событие A - «извлечена карта бубновой масти», событие B - «извлечена дама». Описать словами события $A \cdot B$, $A+B$. Найти вероятности $P(AB)$, $P(A+B)$.

2: Стрелок поражает мишень с вероятностью 0,8. Какова вероятность, что в серии из 60 выстрелов будет не менее 50 попаданий

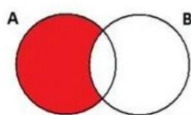
3: В ящике 5 апельсинов и 4 яблока. Наудачу выбираются 3 фрукта. Какова вероятность, что все три фрукта – апельсины?

4: В урне 7 белых шаров и 3 черных. Последовательно вынимаются шары до появления белого. Найти закон распределения дискретной случайной величины X- числа извлечений, математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины

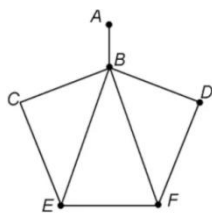
- 5: Для вариационного ряда: **1; 2; 3; 3; 4; 5; 5; 5; 7** указать моду, медиану и размах варьирования. Вычислить среднее значение и дисперсию.
- 6: Имеются данные о количестве дежурств сотрудниками кафедры за месяц. Произведена выборка объемом $n = 15$: 3 0 5 7 4 3 1 9 5 3 4 4 2 8 5. Составить интервальный вариационный ряд. Построить гистограмму распределения частот

Раздел 10. Математический практикум

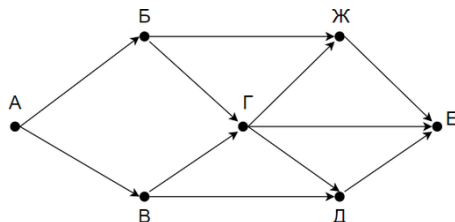
1. Какая операция изображена на кругах Эйлера?



2. Вычислите: $(5 + i)(-2 + 3i)$; $(5 + i) + (-2 + 3i)$.
3. Запишите комплексное число в стандартной тригонометрической форме: $6 - 6i$; $-4 - 3i$.
4. Вычислите $(1 + i)^2$.
5. Решите уравнение $z^2 + 3 + 4i = 0$.
6. Пятеро рабочих встретились при высадке цветов в клумбы. Сколько всего было сделано рукопожатий
7. Определите степень вершины В:



8. Даны два множества $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$, $B = \{3, 6, 9, 12\}$. Запишите и изобразите графически новое множество E: а) $E = A \cup B$; б) $E = A \cap B$.
9. Колины друзья занимаются каким-нибудь видом спорта. 14 из них увлекаются футболом, а 10 — баскетболом. И только двое увлекаются и тем и другим видом спорта. Сколько друзей у Толи?
10. На рисунке — схема дорог, связывающих городские парки А, Б, В, Г, Д, Е. По каждой дороге можно двигаться только в одном направлении, указанном стрелкой. Сколько существует различных путей из парка А в парк Е?



4. СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Основная учебная литература

1. Дадаян, А. А. Математика : учебник / А. А. Дадаян. — 3-е изд., испр. и доп. — Москва : ИНФРА-М, 2024. — 544 с. — (Среднее профессиональное образование). - ISBN 978-5-16-012592-3. - Текст : электронный. - URL: <https://znanium.ru/catalog/product/2132236>

2. Баврин, И. И. Математика : учебник и практикум для среднего профессионального образования / И. И. Баврин. — 2-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 568 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-17016-0. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/561217>

Дополнительная учебная литература

3. Бардушкин, В. В. Математика. Элементы высшей математики : учебник : в 2 томах. Том 2 / В. В. Бардушкин, А. А. Прокофьев. — Москва : КУРС : ИНФРА-М, 2024. — 368 с. — (Среднее профессиональное образование). - ISBN 978-5-906923-34-9. - Текст : электронный. - URL: <https://znanium.ru/catalog/product/2145214>

4. Математика. Практикум : учебник для среднего профессионального образования / под общей редакцией О. В. Татарникова. — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 285 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-03146-1. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/561260>

5. СОВРЕМЕННЫЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНЫЕ БАЗЫ ДАННЫХ И ИНФОРМАЦИОННЫЕ РЕСУРСЫ СЕТИ ИНТЕРНЕТ

- Электронно-библиотечная система Znanium.com: www.znanium.com
- Электронная библиотека Юрайт: <https://biblio-online.ru>
- Электронно-библиотечная система «Троицкий мост»: www.trmost.ru.
- Научная электронная библиотека : <http://elibrary.ru>
- Справочно-правовая система «Консультант Плюс» : <http://www.consultant.ru/>
- Справочно-правовая система «Гарант»: <http://www.internet.garant.ru>
- Сайт Центрального экономико-математического института РАН: www.cemi.rssi.ru
- Сайт электронной библиотеки «КнигаФонд»: www.knigafund.ru

**Перечень лицензионного программного обеспечения
и информационных справочных систем**

- Microsoft Windows
- Microsoft Word
- Microsoft Excel
- Microsoft PowerPoint
- Microsoft Office 365
- Mathcad
- Антивирус Касперского
- Справочно-правовая система «Консультант Плюс»
- Справочно-правовая система «Гарант»